305　理系数学　解答

$\boxed{1}$

問１（1） $y' = 3(\sin x + \cos^3 3x)^2 \cdot \{\cos x + 3\cos^2 3x \cdot (-3\sin 3x)\} = 3(\sin x + \cos^3 3x)^2(\cos x - 9\sin 3x \cos^2 3x)$

（2） $y' = e^{-(\log x)^2} \cdot \left(-2\log x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-2e^{-(\log x)^2}\log x}{x}$

問２（1） $y' = e^{-(x-a)^2} \cdot \{-2(x-a)\} = -2(x-a)e^{-(x-a)^2}$

$y' = 0$ のとき $x = a$ であり， $x = a$ の前後で y' の符号は正から負に変わるので，
$x = a$ で極大値1をとる。

（2） $y'' = -2(x-a)e^{-(x-a)^2} = -2e^{-(x-a)^2} - 2(x-a)\{-2(x-a)e^{-(x-a)^2}\} = e^{-(x-a)^2}\{4(x-a)^2 - 2\}$

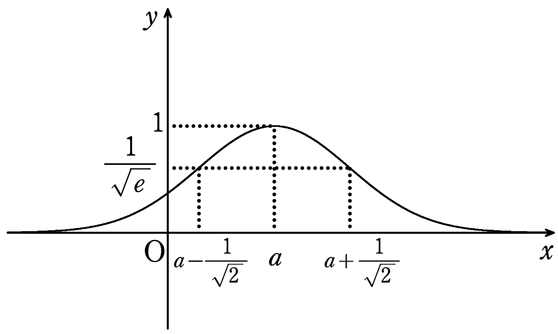
$y'' = 0$ のとき $(x-a)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = a \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，

$x = a \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の前後で y'' の符号が変わるので，変曲点は $\left(a \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ である。

（3） $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-(x-a)^2} = 0$ より，直線 $y = 0$ が漸近線である。

（4）（1），（2），（3）より，増減・凹凸表は下左図のようになり，グラフは下右図のようになる。

x	$\cdots$	$a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
y	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘



問３（1） $S = 6a^2$， $V = a^3$

（2） $\dfrac{dS}{da} = 12a$， $\dfrac{dV}{da} = 3a^2$ より， $\dfrac{dV}{dS} = \dfrac{\frac{dV}{da}}{\frac{dS}{da}} = \dfrac{dV}{da} \cdot \dfrac{da}{dS} = 3a^2 \cdot \dfrac{1}{12a} = \dfrac{a}{4}$

（3） $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\frac{dV}{dS}}{\frac{dt}{dS}} = \dfrac{dV}{dS} \cdot \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{a}{4} \cdot 2 = \dfrac{a}{2}$ より， $a = 10$ のとき $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{10}{2} = 5\mathrm{cm}^3 / s$

$\boxed{2}$

問１（1）なす角をθとおくと，$\cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$より，$\theta=60^\circ$

（2）求める単位ベクトルを$\vec{e}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{e}=0\\ \vec{y}\cdot\vec{e}=0\\ |\vec{e}|=1\end{cases}$より，$\begin{cases}a+2b+3c=0\\ 3a+2b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$

これを解いて，$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$（複号同順）　よって，$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -2,\ 1)$

（3）点 C が平面 OAB 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表せる。

よって，$(-t,\ 1,\ 2+t)=\alpha(1,\ 3,\ 1)+\beta(2,\ 1,\ 1)$より，$\begin{cases}-t=\alpha+2\beta\\ 1=3\alpha+\beta\\ 2+t=\alpha+\beta\end{cases}$

これを解いて，$\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\beta=\dfrac{4}{7}$，$t=-\dfrac{9}{7}$

問２（1）点 Q から直線 OP に下ろした垂線の足を H とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\vec{p}$と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{p}-\vec{q}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$だから，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$より，$(t\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{p}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|^2}$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|^2=|t\vec{p}-\vec{q}|^2=t^2|\vec{p}|^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=|\vec{q}|^2-\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}{|\vec{p}|^2}$より，$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\sqrt{|\vec{q}|^2-\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}{|\vec{p}|^2}}$

（2）$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{p}|\sqrt{|\vec{q}|^2-\dfrac{(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}{|\vec{p}|^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$

問３（1）$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG_3}}=\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{3}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OG_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OG_3}}}{3}=\dfrac{2}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG_4}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

（3）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

（4）$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$だから，（3）より，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$である。

$\boxed{3}$

問１（1）$\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx=\int\left(\sqrt{x}-3+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\log|x|+C$（$C$は積分定数）

（2）$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，$dx=\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ で，$x:0\to\sqrt{2}$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\theta}{\sqrt{2-2\sin^2\theta}}\cdot\sqrt{2}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta$

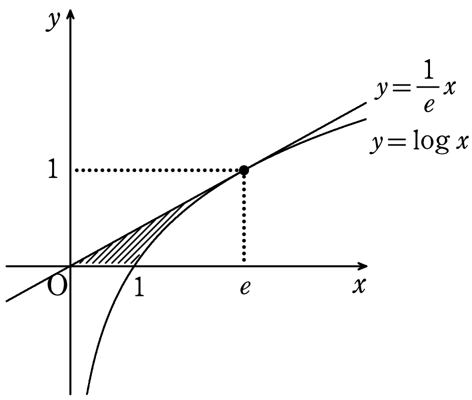
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)d\theta=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

（3）$\displaystyle\int x\sin x\cos xdx=\int x\cdot\frac{1}{2}\sin2xdx=x\left(-\frac{1}{4}\cos2x\right)+\int\frac{1}{4}\cos2xdx$

$$=-\frac{1}{4}x\cos2x+\frac{1}{8}\sin2x+C$$（Cは積分定数）

問２（1）$y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$ だから，$x=e$ のとき $y'=\dfrac{1}{e}$

よって，接線 $L: y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e}x$



（2）$\displaystyle S=\frac{1}{2}\cdot e\cdot1-\int_1^e\log xdx=\frac{e}{2}-\big[x\log x-x\big]_1^e=\frac{e}{2}-1$

（3）$\displaystyle S=\frac{1}{3}\cdot(\pi\cdot1^2)\cdot e-\int_1^e\pi(\log x)^2dx=\frac{e}{3}\pi-\pi\int_1^e(\log x)^2dx$

$$=\frac{e}{3}\pi-\pi\left\{\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-\int_1^e2\log xdx\right\}$$
$$=\frac{e}{3}\pi-\pi\left\{e-2\big[x\log x-x\big]_1^e\right\}$$
$$=\frac{e}{3}\pi-\pi(e-2)=2\pi\left(1-\frac{e}{3}\right)$$

$\boxed{4}$

問１

$(57-\overline{x})^2=4$ より，$57-\overline{x}=\pm 2 \Leftrightarrow \overline{x}=55$，$59$

$\overline{x}=55$ のときは $(80-\overline{x})^2=(80-55)^2=625$ となり適する。

$\overline{x}=59$ のときは $(80-\overline{x})^2=(80-59)^2=441$ となり適さない。

よって，$\mathrm{A}=50\times\overline{x}=50\times 55=2750$

$(57-\overline{x})(75-\overline{y})=50 \Leftrightarrow (57-55)(75-\overline{y})=50 \Leftrightarrow 75-\overline{y}=25$ より，$\overline{y}=50$

よって，$\mathrm{B}=50\times\overline{y}=50\times 50=2500$

問２

$\dfrac{26826}{50}=536.52$ より，x の分散は 537

$(23.1)^2=533.61$，$(23.2)^2=538.24$ だから，$23.1<\sqrt{536.52}<23.2$ より，x の標準偏差は 23

$\dfrac{14856}{50}=297.12$ より，y の分散は 297

$(17.2)^2=295.84$，$(17.3)^2=299.29$ だから，$17.2<\sqrt{297.12}<17.3$ より，y の標準偏差は 17

問３

$\dfrac{7480}{50}=149.6$ より，x と y の共分散は 149.6

よって，x と y の相関係数は $\dfrac{149.6}{\sqrt{536.52}\sqrt{297.12}}$

ここで，$\dfrac{149.6}{23.1\times 17.2}=0.376\cdots$，$\dfrac{149.6}{23.2\times 17.3}=0.372\cdots$ より，$0.372<\dfrac{149.6}{\sqrt{536.52}\sqrt{297.12}}<0.377$

したがって，x と y の相関係数は 0.4

問４

x と y の相関係数は 0.4 だから，x と y には弱い正の相関関係がある。

よって，散布図として適切なものは,「イ」である。