201　文系数学　解答

$\boxed{1}$

(1)	①	$\dfrac{13}{2}$
	②	$\dfrac{7}{2}$
(2)	③	1440
	④	3600
	⑤	2400
(3)	⑥	$-2+2\sqrt{2}$
	⑦	$\sqrt{2}$
	⑧	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
(4)	⑨	730
	⑩	21

$\boxed{2}$

(1) $\left(\dfrac{1\cdot 5+3\cdot 1}{3+1},\ \dfrac{1\cdot 1+3\cdot 3}{3+1}\right)$ より，$\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right)$

(2) 直線 OB の傾きが 3 だから，ℓ： $y-1=3(x-5) \Leftrightarrow y=3x-14$ ……①

また，直線 OP： $y=\dfrac{5}{4}x$ ……②

①，②より， $3x-14=\dfrac{5}{4}x \Leftrightarrow x=8$

①に代入して， $y=10$

よって，求める交点は$(8,\ 10)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ 1)+t(1,\ 3)=(t+5,\ 3t+1)$ より，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=(t+5)^2+(3t+1)^2=10t^2+16t+26=10\left(t+\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{98}{5}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \geqq 0$ だから， $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ が最小のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ も最小になる。

よって， $t=-\dfrac{4}{5}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{98}{5}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$ をとる。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ 1)-\dfrac{4}{5}(1,\ 3)=\left(\dfrac{21}{5},\ -\dfrac{7}{5}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot\dfrac{21}{5}+3\cdot\left(-\dfrac{7}{5}\right)=0$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 3)$， $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\dfrac{21}{5},\ -\dfrac{7}{5}\right)$ より， $\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\left|1\cdot\left(-\dfrac{7}{5}\right)-3\cdot\dfrac{21}{5}\right|=\dfrac{1}{2}\left|-14\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 14=7$

202　文系数学　解答

1

(1)	①	4
	②	4
(2)	③	7
	④	$\dfrac{\sqrt{35}}{2}$
(3)	⑤	9
	⑥	-1
	⑦	$\dfrac{8}{9}$
(4)	⑧	$\dfrac{1}{91}$
	⑨	$\dfrac{17}{27}$
	⑩	$\dfrac{10000}{199}$

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=x^3-3x^2-48x+4$ より, $f'(x)=3x^2-6x-48=3(x^2-2x-16)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-16=0$ より, $x=1\pm\sqrt{17}$

x	$\cdots$	$1-\sqrt{17}$	$\cdots$	$1+\sqrt{17}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $x=1-\sqrt{17}$ のとき極大値をとる。

(2) $f(x)=x^3-3ax^2+12(a^2-5)x+4$ より, $f'(x)=3x^2-6ax+12(a^2-5)$

点$\left(1,\ f(1)\right)$における接線が原点を通るとき, $\dfrac{f(1)-0}{1-0}=f'(1)$ より, $f(1)=f'(1)$

よって, $12a^2-3a-55=12a^2-6a-57 \Leftrightarrow 3a=-2$ より, $a=-\dfrac{2}{3}$

(3) $f(x)$ が極値をもつには, 2 次関数 $f'(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交われば良いので,

$f'(x)=0$ の判別式を D とおくと,

$D/4=(-3a)^2-3\cdot 12(a^2-5)=-9(3a^2-20)>0 \Leftrightarrow a^2<\dfrac{20}{3}$ より, $-\dfrac{2\sqrt{15}}{3}<a<\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

(4) $-\dfrac{2\sqrt{15}}{3}<a<\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ のとき, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6ax+12(a^2-5)=0$ より, $x=a\pm\sqrt{-3a^2+20}$

よって, $f(x)$ は $x=p=a-\sqrt{-3a^2+20}$ で極大値, $x=q=a+\sqrt{-3a^2+20}$ で極小値をとる。

したがって, $p-q=-2\sqrt{-3a^2+20}$

(5) $-\dfrac{2\sqrt{15}}{3}<a<\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ のとき, 極大値 $f(p)$, 極小値 $f(q)$ だから,

$$f(p)-f(q)=\left[f(x)\right]_q^p=\int_q^p f'(x)dx=3\int_q^p (x-p)(x-q)dx=3\left\{-\frac{1}{6}(p-q)^3\right\}=-\frac{1}{2}(p-q)^3$$

$$=-\frac{1}{2}(-2\sqrt{-3a^2+20})^3=4(-3a^2+20)^{\frac{3}{2}}$$

よって, $4(-3a^2+20)^{\frac{3}{2}}=32 \Leftrightarrow (-3a^2+20)^{\frac{3}{2}}=8=4^{\frac{3}{2}}$ より, $-3a^2+20=4 \Leftrightarrow a^2=\dfrac{16}{3}$

したがって, $a=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

これらは $-\dfrac{2\sqrt{15}}{3}<a<\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ を満たす。

1

(1)	①	$\frac{8}{9}$
	②	$\frac{1+\sqrt{17}}{6}$
	③	$\frac{9-\sqrt{17}}{8}$
(2)	④	4
	⑤	$6\sqrt{3}$
(3)	⑥	$\frac{1}{2}$
	⑦	12
(4)	⑧	1
	⑨	2
	⑩	$\frac{8}{3}$

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ より，$f'(x)=3x^2+4x+3$

$f(x)=f'(x)$ のとき，$x^3+2x^2+3x+4=3x^2+4x+3 \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)=0$

よって，$x=\pm1$ より，$f(1)=10$，$f(-1)=2$

したがって，求める共有点の座標は，$(1,\ 10)$，$(-1,\ 2)$

(2) 2 点$(1,\ 10)$，$(-1,\ 2)$ を通る直線を $y=g(x)$ とおくと，

$$S=\int_{-1}^{1}\{g(x)-f'(x)\}dx=-3\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx=-3\left\{-\frac{1}{6}(1-(-1))^3\right\}=4$$

(3) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値 2，$x=3$ で極小値 -4 をとるので，$f(1)=2$，$f(3)=-4$，$f'(1)=0$，$f'(3)=0$

$f(1)=2$，$f(3)=-4$ より，$a+b+c+d=2$ ……①，$27a+9b+3c+d=-4$ ……②

$f'(1)=0$，$f'(3)=0$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c=3a(x-1)(x-3)$ と因数分解できるので，

係数を比べて，$b=-6a$ ……③，$c=9a$ ……④

①，②，③，④より，$a=\dfrac{3}{2}$，$b=-9$，$c=\dfrac{27}{2}$，$d=-4$

このとき，確かに題意を満たす。

(4) $f(x)=ax^3+3ax^2+ax+d$ より，$f'(x)=3ax^2+6ax+a$

$f(x)$ が極値もつには，2 次関数 $f'(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交われば良いので，

$f'(x)=0$ の判別式を D とおくと，$D/4=(3a)^2-3a\cdot a=6a^2>0$ より，$a\neq0$

このとき，$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3ax^2+6ax+a=0$ の 2 解 α，β で $f(x)$ は極値もつ。

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{3}$ だから，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

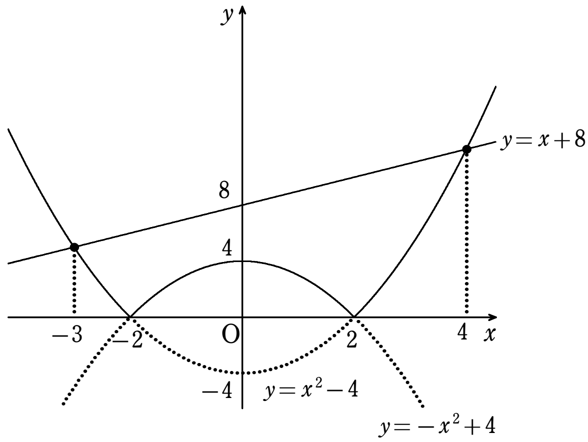
205　文系数学　解答

1

(1)	①	$\dfrac{17}{3}$
	②	$\dfrac{\sqrt{114}}{3}$
(2)	③	3
	④	3
	⑤	2
(3)	⑥	99
	⑦	48
(4)	⑧	$\dfrac{37}{6}$
	⑨	$\dfrac{\pi}{2}$
	⑩	$\dfrac{5}{3}$

$\boxed{2}$

(1) $C: y=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & (x\leqq -2,\ 2\leqq x) \\ -x^2+4 & (-2\leqq x\leqq 2) \end{cases}$



$\ell:\ y=x+8$

$x^2-4=x+8 \Leftrightarrow x^2-x-12=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4)=0$ より，

$x=-3$，4

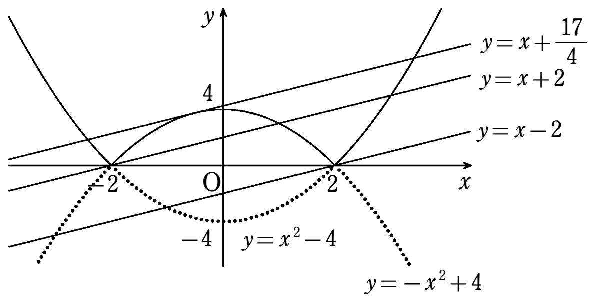
$x=-3$ のとき $y=5$，$x=4$ のとき $y=12$

よって，求める交点の座標は，$(-3,\ 5)$，$(4,\ 12)$

(2) $S=\int_{-3}^{4}\{(x+8)-(x^2-4)\}dx-\int_{-2}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-4)\}dx=-\int_{-3}^{4}(x+3)(x-4)dx+2\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(4-(-3))^3\right\}+2\left\{-\frac{1}{6}(2-(-2))^3\right\}=\frac{343}{6}-\frac{128}{6}=\frac{215}{6}$$

(3) $y=-x^2+4$ のとき $y'=-2x$ より，



$-2x=1$ のとき $x=-\dfrac{1}{2}$ で，$y=\dfrac{15}{4}$

よって，$y=-x^2+4$ と接するときのℓは，

$\ell:\ y-\dfrac{15}{4}=x+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=x+\dfrac{17}{4}$

ℓが点$(-2,\ 0)$を通るとき，$\ell:\ y=x+2$

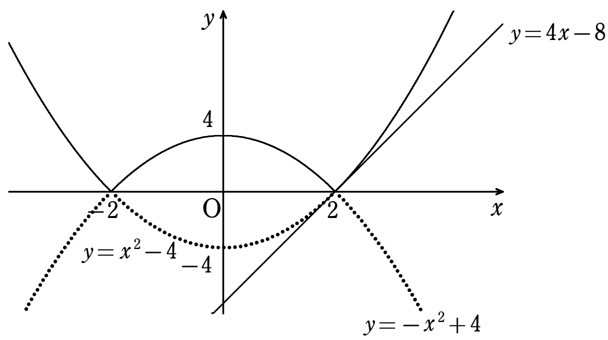
また，ℓが点$(2,\ 0)$を通るとき，$\ell:\ y=x-2$ であり，

$y=x-2$，$y=x^2-4$ より，$x^2-4=x-2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$，$2$

よって，$y=x-2$ と $y=x^2-4$ は $x>2$ で共有点をもたない。

したがって，グラフより，求めるbの範囲は，$-2<b<2$，$\dfrac{17}{4}<b$

(4) $y=x^2-4$ のとき $y'=2x$ より，



$x=2$ での接線の傾きは4

よって，$\ell:\ y=6x+b$ がCとただ1点を

共有するのは，グラフより，$y=x^2-4$

と $x>2$ で接するときである。

このとき，$y'=2x=6$ より，$x=3$ だから，

$x>2$ で接する。

$x=3$ のとき $y=3^2-4=5$ だから，$\ell:\ y=6x+b$ は

点$(3,\ 5)$を通るので，$5=18+b$ より，$b=-13$

したがって，$b=-13$，共有点の座標は$(3,\ 5)$