数学　解答例

公募　数学①（理工学部物理学科、理工学部機能分子化学科、知能情報学部）

1 (1)　4 人のうちのどの 1 人が勝者になるかで ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りの場合があり，勝者がどの手を出して勝つかで ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りの場合があるので，求める確率は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=\frac{4}{27}$$

である。

(2)　1 回目で 4 人のうちの 3 人が勝ち残る（すなわち 1 人が負ける）確率は 1 人が勝つ確率と同じであるから，(1)より $\frac{4}{27}$ である。残った 3 人が 2 回目のじゃんけんをして 1 人が勝つ確率は，(1)と同様に考えて

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1=\frac{1}{3}$$

であから，求める確率は

$$\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$$

である。

2 (1)　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を用いると，

$$\sin 2\theta=\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin\theta(\cos\theta-\frac{1}{2})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta=0 \text{ または } \cos\theta=\frac{1}{2}$$

となる。$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，方程式の解は

$$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

である。

(2)　不等式を変形すると

$$(\cos\theta-3)(2\cos\theta+\sqrt{3})>0$$

となる。$\cos\theta\leqq 1$ より $\cos\theta-3<0$ であるから $2\cos\theta+\sqrt{3}<0$ となり，

$$\cos\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。これと $0\leqq\theta<2\pi$ より，不等式の解は

$$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{7}{6}\pi$$

である。

3 (1)　$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，$S_n=1-na_n$ ……①　が成り立つ。

①で $n=1$ とおくと $S_1=1-a_1$ となり，$S_1=a_1$ であるから $a_1=\frac{1}{2}$ である。

①で $n=2$ とおくと $S_2=1-2a_2$ となり， $S_2=a_1+a_2=\dfrac{1}{2}+a_2$ であるから $a_2=\dfrac{1}{6}$ である。

①で $n=3$ とおくと $S_3=1-3a_3$ となり， $S_3=a_1+a_2+a_3=\dfrac{2}{3}+a_3$ であるから $a_3=\dfrac{1}{12}$ である。

(2)　$n\geqq 1$ のとき，①と $S_{n+1}=1-(n+1)a_{n+1}$ より

$$S_{n+1}-S_n=-(n+1)a_{n+1}+na_n$$

が成り立ち， $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから $(n+2)a_{n+1}=na_n$ である。両辺に $n+1$ をかけると

$$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

となる。よって $n(n+1)a_n=b_n$ とおくと $b_{n+1}=b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ が成り立ち，数列 $\{b_n\}$ は定数列である。よって

$$b_n=b_1=1\cdot 2a_1=1$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

となる。

$\boxed{4}$ (1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-a(x+1)}{(x-1)^2}$ が有限な値になるとき，その値を A とおく．このとき，

$$\lim_{x\to 1}\{\sqrt{x}-a(x+1)\}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-a(x+1)}{(x-1)^2}\cdot(x-1)^2$$

より

$$1-2a=A\cdot 0^2$$

となり， $a=\dfrac{1}{2}$ である。

逆に $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-a(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2}(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2}{\{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\}^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2}=-\frac{1}{8}$$

となり，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-a(x+1)}{(x-1)^2}$ は有限な値になる。

よって極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-a(x+1)}{(x-1)^2}$ が有限な値になるときの a の値は

$$a=\frac{1}{2}$$

である。

(2)　(1)より，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-a(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{8}$$

である．

数学　解答例

$\boxed{\text{公募}}$　数学②（理工学部生物学科）

$\boxed{1}$　数学①の $\boxed{1}$ と同じ

$\boxed{2}$　数学①の $\boxed{2}$ と同じ

$\boxed{3}$　数学①の $\boxed{3}$ と同じ

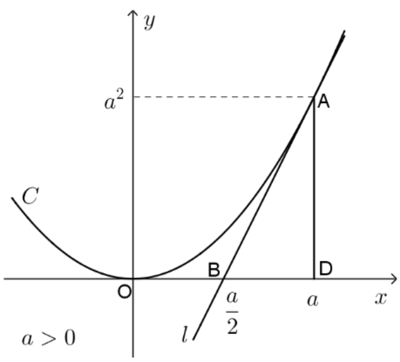
$\boxed{4}$ (1)　$y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから，l の傾きは $2a$ である。よって l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

より

$$y = 2ax - a^2$$

である。



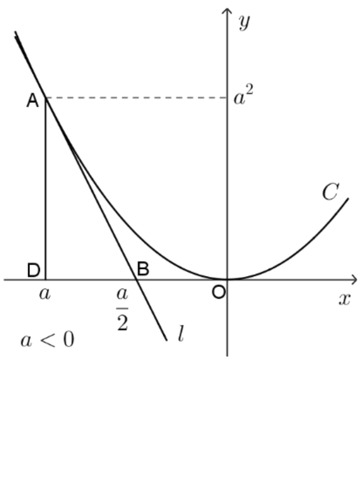
(2)　l と x 軸との交点を B とすると，$B\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ である。また，点 $(a,\ 0)$ を D とする。C と x 軸と l とで囲まれた部分の面積を S とすると，S は C と x 軸と直線 AD とで囲まれた部分の面積から三角形 ABD の面積を引いたものである。

$a > 0$ のとき，

$$S = \int_0^a x^2\,dx - \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right)\cdot a^2 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{12}a^3$$

である。また，$a < 0$ のとき，

$$S = \int_a^0 x^2\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\right)\cdot a^2 = -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^3 = -\frac{1}{12}a^3$$



である。よって $a \neq 0$ のとき，

$$S = \frac{1}{12}|a|^3$$

である。

数学　解答例

$\boxed{\text{公募}}$　数学③（マネジメント創造学部：数学評価型）

$\boxed{1}$　数学①の $\boxed{1}$ と同じ

$\boxed{2}$　数学①の $\boxed{2}$ と同じ

$\boxed{3}$ (1)　円 C の中心は $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ である。$k=-2$ のとき，直線 l の方程式は $2x+y-4=0$ であるから，P から l に引いた垂線の長さは

$$\frac{|2\cdot(-1)+1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

である。

(2)　l と C が少なくとも 1 個の共有点をもつための条件は，$\mathrm{P}(-1,\ 1)$ と $l:-kx+y+3k+2=0$ の距離が C の半径 3 を越えないことである。よって

$$\frac{|-k\cdot(-1)+1+3k+2|}{\sqrt{(-k)^2+1^2}}\leqq 3$$

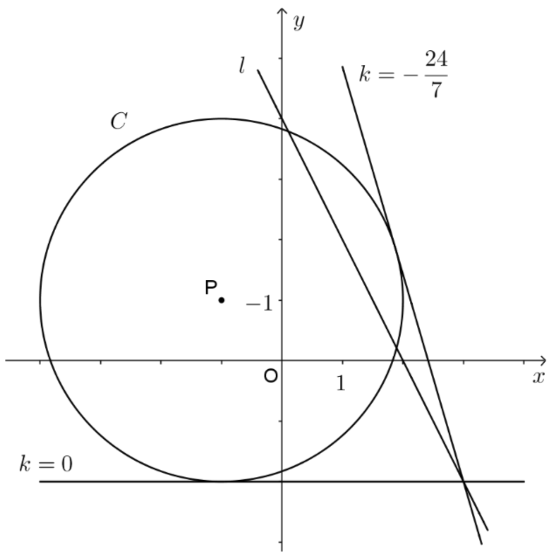
より，$|4k+3|\leqq 3\sqrt{k^2+1}$ である。両辺ともに 0 以上であるから 2 乗しても同値で，

$$(4k+3)^2\leqq 9(k^2+1)\quad すなわち\quad 7k^2+24k\leqq 0$$

となる。よって求める k の値の範囲は

$$-\frac{24}{7}\leqq k\leqq 0$$

である。



$\boxed{4}$　数学②の $\boxed{4}$ と同じ

以上